6.1.6 Řešení rovnic a jejich soustav v komplexním oboru I

Předpoklady: 6104

Nejdříve shrnutí některých vlastností komplexních čísel:

1. Podařilo se nám pro komplexní čísla zavést operace sčítání, odčítání, násobení i dělení. Sčítání i dělení jsou asociativní, komutativní a platí pro ně distributivní zákon. $\Rightarrow$ můžeme tedy v komplexním oboru provádět výpočty obdobným způsobem jako v reálném oboru.
2. Komplexní čísla nelze uspořádat podle velikosti a nelze tedy mezi nimi zavést vztah nerovnosti. Nelze je ani rozdělit na kladná a záporná. Nemá smysl řešit v komplexním oboru nerovnice.
3. V komplexním oboru neplatí rovnost $a^2 = |a|^2$. (například $(1+i)^2 = 2i$, ale $|1+i|^2 = \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2 = 2$.
4. Dvojčlen $x^2 + y^2$ není možné v reálném oboru rozložit na součin. Je však možné rozložit tento dvojčlen na součin v komplexním oboru takto: $x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$.

Tak můžeme začít.

Př. 1: Řeš rovnici: $x(1-2i)+2(x-i)=(2-i)(2+x)$. Výsledek ověř zkouškou.

Postupujeme stejně jako u lineárních rovnic v reálném oboru.

$$x(1-2i)+2(x-i)=(2-i)(2+x)$$
$$x-2ix+2x-2i=4+2x-2i-ix$$
$$x-ix=4$$
$$x(1-i)=4$$
$$x=\frac{4}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{4+4i}{1+1}=\frac{4+4i}{2}=2+2i \qquad K=\{2+2i\}$$

Zkouška:

$$L=x(1-2i)+2(x-i)=(2+2i)(1-2i)+2\left[(2+2i)-i\right]=2-4i+2i-4i^2+2(2+i)=$$
$$=2-2i+4+4+2i=10$$
$$P=(2-i)(2+x)=(2-i)\left[2+(2+2i)\right]=(2-i)(4+2i)=8+4i-4i-2i^2=8+2=10$$
$$L=P$$

Př. 2: Řeš rovnici $\frac{x+i}{2x+1}=\frac{2x-2}{4x-3i}$. Výsledek ověř zkouškou.

$$\frac{x+i}{2x+1}=\frac{2x-2}{4x-3i} \qquad /\cdot(2x+1)(4x-3i)$$
$$(x+i)(4x-3i)=(2x-2)\cdot(2x+1)$$
$$4x^2-3xi+4xi-3i^2=4x^2+2x-4x-2$$
$$xi+3=-2x-2$$

$2x + xi = -5$

$x = \frac{-5}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{(-5)(2-i)}{4-i^2} = \frac{(-5)(2-i)}{5} = -2+i \qquad K = \{-2+i\}$

$L = \frac{x+i}{2x+1} = \frac{(-2+i)+i}{2(-2+i)+1} = \frac{-2+2i}{-4+2i+1} = \frac{-2+2i}{-3+2i} \cdot \frac{-3-2i}{-3-2i} = \frac{6+4i-6i-4i^2}{9-4i^2} =$

$= \frac{6-2i+4}{9+4} = \frac{10}{13} - \frac{2}{13}i$

$P = \frac{2x-2}{4x-3i} = \frac{2(-2+i)-2}{4(-2+i)-3i} = \frac{-4+2i-2}{-8+4i-3i} = \frac{-6+2i}{-8+i} \cdot \frac{-8-i}{-8-i} = \frac{48+6i-16i-2i^2}{64+8i-8i-i^2} =$

$= \frac{48-10i+2}{64+1} = \frac{50-10i}{65} = \frac{5(10-2i)}{5 \cdot 13} = \frac{10}{13} - \frac{2}{13}i$

$L = P$

Poznámka: Je dobré si uvědomit, že u komplexních zlomků je těžké poznat, zda nejde o stejné číslo. Zlomky $\frac{-2+2i}{-3+2i}$ a $\frac{-6+2i}{-8+i}$ opravdu nebudí dojem, že jde o stejná komplexní čísla.

Pedagogická poznámka: Předchozí poznámka je důležitá pro kontrolu výsledků. Studenti mají tendenci v okamžiku, kdy jim vyjde zlomek kontrolovat zda je výsledek správně i v tomto okamžiku to zdaleka není zřejmé.

Ještě zbývají soustavy lineárních rovnic:

Př. 3: Řeš soustavu rovnic:

$$z - 2w = 1-4i$$
$$iz + (2-i)w = 5+4i$$

Stejné jako u reálných čísel. Vyjádříme z z první rovnice a dosadíme do druhé.

$z - 2w = 1-4i \Rightarrow z = 1-4i+2w$

Dosadíme do druhé rovnice:

$i(1-4i+2w) + (2-i)w = 5+4i$

$i - 4i^2 + 2iw + 2w - iw = 5+4i$

$2w + iw = 1+3i$

$w(2+i) = 1+3i$

$w = \frac{1+3i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i+6i-3i^2}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$

$z = 1-4i+2w = 1-4i+2(1+i) = 1-4i+2+2i = 3-2i$

$K = \{[3-2i; 1+i]\}$

Ani u složitějších soustav se situace nemění.

Př. 4: Vyřeš sčítací metodou soustavu rovnic $\begin{aligned} x+y+2z&=5+i \\ 2x-y+2z&=5-2i \\ x-2y+z&=1-4i \end{aligned}$.

$$\begin{array}{lr} & x+y+2z=5+i \\ & 2x-y+2z=5-2i \\ & x-2y+z=1-4i \\ \hline & x+y+2z=5+i \\ 2[\![1]\!]-[\![2]\!] & 3y+2z=5+4i \\ [\![1]\!]-[\![3]\!] & 3y+z=4+5i \\ \hline & x+y+2z=5+i \\ & 3y+2z=5+4i \\ [\![2]\!]-[\![3]\!] & z=1-i \\ \hline \end{array}$$

Dopočítáme ostatní proměnné:

y z druhé rovnice: $3y+2z=3y+2(1-i)=5+4i$

$3y+2-2i=5+4i$

$3y=3+6i$

$y=1+2i$

x z první rovnice: $x+y+2z=x+(1+2i)+2(1-i)=5+i$

$x+1+2i+2-2i=5+i$

$x=2+i$

$K=\{[2+i;1+2i;1-i]\}$

Teď něco horšího (jenom početně, postup je jednoduchý)

Př. 5: Řeš rovnici: $x\dfrac{1-2i}{1-i}+1+ix=3x-\dfrac{2}{3+i}$.

Postupujeme stejně jako u lineárních rovnic v reálném oboru.

$$x\frac{1-2i}{1-i}+1+ix=3x-\frac{2}{3+i} \qquad /\cdot(1-i)(3+i)$$

$$x(1-2i)(3+i)+(1+ix)(1-i)(3+i)=3x(1-i)(3+i)-2(1-i)$$

$$x(1-2i)(3+i)+(1+ix)(1-i)(3+i)=3x(1-i)(3+i)-2(1-i)$$

$$x\left(3+i-6i-2i^2\right)+(1+ix)\left(3+i-3i-i^2\right)=3x\left(3+i-3i-i^2\right)-2+2i$$

$$x(5-5i)+(1+ix)(4-2i)=3x(4-2i)-2+2i$$

$$5x-5xi+4-2i+4xi-2xi^2=12x-6xi-2+2i$$

$$5x-5xi+4-2i+4xi+2x=12x-6xi-2+2i$$

$$-5x+5xi=-6+4i$$

$$x(-5+5i)=-6+4i$$

$$x=\frac{-6+4i}{-5+5i}\cdot\frac{-5-5i}{-5-5i}=\frac{30+30i-20i-20i^2}{25+25}=\frac{50+10i}{50}=1+\frac{1}{5}i$$

$K = \left\{ 1 + \frac{1}{5} i \right\}$

Pedagogická poznámka: Předcházející příklad by logicky patřil před soustavy rovnic, ale velká část studentů má kvůli numerickým chybám obrovské problémy.
Jistým nebezpečím předchozího příkladu je, že pokud studenti zvolí jiný postup (sjednocení zlomků) vyjde jim výsledek ve tvaru $z = \frac{-16 + 2i}{-15 + 5i}$, který je sice správný, ale hodně odlišný od tvaru, který je uveden v řešení.

Př. 6: Petáková:
strana 139/cvičení 56 b)
strana 138/cvičení 52 b) d)

Shrnutí: Lineární rovnice i jejich soustavy se v komplexním oboru řeší stejně jako v oboru reálném.